**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

**ПО ПРОВЕДЕНИЮ ОЗНАКОМИТЕЛЬНОЙ РАСЧЕТНОЙ ПРАКТИКИ ПО МЕХАНИКЕ**

**РЕКОМЕНДОВАНЫ К УТВЕРЖДЕНИЮ**

кафедрой физики и математики

(протокол № 20 от 09.06.2023)

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ В.С.Савенко

**ВВЕДЕНИЕ**

Ознакомительная расчетная практика по механике является важнейшим этапом профессиональной подготовки студента-физика. Она неотделима от учебного процесса, так как студенты овладевают умениями по обработке результатов физического эксперимента при выполнении лабораторных работ учебного и исследовательского характера. Практика является логическим продолжением изучения дисциплин «Механика», «Физический практикум: механика».

Практика проводится в течение первого семестра в количестве 36 часов. Студенты проходят практику на базе лаборатории механики физико-инженерного факультета.

**1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ПРАКТИКИ**

*Целью* практики является закрепление и углубление теоретической и практической подготовки студентов и приобретение ими опыта самостоятельной работы, практических навыков и компетенций в сфере профессиональной деятельности.

*Задачи практики*:

* закрепление и углубление теоретических знаний студентов;
* развитие потребности в постоянном самообразовании и самовоспитании;
* закрепление интереса к профессии;
* формирование и развитие профессиональных умений и навыков.

**2.** **СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИКИ**

1. *Вопросы техники безопасности и охраны труда во время практики.*
2. *Оценка истинного значения измеряемой величины.*Измерения прямые, косвенные, совмещенные. Погрешности измерений, причины появления погрешностей. Систематические и случайные погрешности. Промахи. Вероятность. Понятие о законах распределения случайных величин. Оценка случайных погрешностей. Законы распределения ошибок. Стандартное отклонение среднего арифметического. Доверительный интервал. Оценка при прямых измерениях. Исключение промахов. Оценка при косвенных измерениях. Физические приборы и их точность. Классы точности приборов. Инструментальная погрешность. Приемы вычислений. Правила округления.
3. *Корреляционные зависимости.*Понятие о корреляционных связях. Числовые характеристики двух случайных величин. Понятие о прямой регрессии. Среднеквадратичное отклонение от прямой регрессии. Построение графиков. Метод границ погрешностей (дифференциальный). Статистический и графический методы.
4. *Нахождение эмпирических зависимостей методом наименьших квадратов*. Отыскание параметров эмпирических формул. Отыскание параметров многочлена.
5. *Выполнение репродуктивных и проблемно-поисковых заданий.*
6. *Подведение итогов практики.*

**План прохождения практики**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Разделы (этапы) практики | Виды учебной деятельности на практике, включая самостоятельную работу студентов  | Практические умения и навыки, компетенции, формируемые на данном этапе |
| 1 | Подготовительный (планирования) | Установочная конференция | Умение акцентировать внимание на главном.Усвоение основных правил безопасной жизнедеятельности, охраны труда.Умение планировать свою работу |
| Групповой инструктаж по требованиям безопасности и охране труда во время прохождения практики |
| Групповое и индивидуальное консультирование |
| Подготовка индивидуального плана работы |
| 2 | Основной (практической деятельности) | Индивидуальный инструктаж по требованиям безопасности и охране труда на рабочем месте | Безопасные условия труда на рабочем месте |
| Знакомство с методами и алгоритмами оценки истинного значения измеряемой величины | Умение поиска необходимых сведений и их применения в практической деятельности |
| Знакомство с алгоритмом обработки результатов измерений для нахождения аналитических зависимостей между величинами на основе корреляции между ними |
| Знакомство с методом наименьших квадратов для нахождения эмпирических зависимостей между измеряемыми величинами |
| Выполнение индивидуальных заданий | Самостоятельность в приобретении новых знаний, творческий подход к решению задач |
| Подготовка отчетной документации по практике | Умение документировать программные продукты, готовить отчетную документацию в соответствии с требованиями |
| 3 | Заключительный (подведение итогов) | Проведение дифференцированного зачета | Умение критически относиться к замечаниям |
| Итоговая конференция | Умение выступать и отстаивать свою точку зрения |

**Календарно-тематический план прохождения практики**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер этапа | Наименование раздела, темы практики | Всего часов |
|
| 1 | Индивидуальный инструктаж по требованиям безопасности и охране труда на рабочем месте. Подготовка индивидуального плана работы | 2 |
| 2 | Знакомство с методами и алгоритмами оценки истинного значения измеряемой величины | 2 |
| 3 | Знакомство с алгоритмом обработки результатов измерений для нахождения аналитических зависимостей между величинами на основе корреляции между ними | 2 |
| 4 | Знакомство с методом наименьших квадратов для нахождения эмпирических зависимостей между измеряемыми величинами | 2 |
| 5 | Выполнение индивидуальных заданий | 26 |
| 6 | Подготовка отчетной документации по практике | 2 |
| ИТОГО | 36 |

**3. Обязанности студента во время прохождения практики**

*Студент обязан*:

* участвовать в курсовых собраниях по организационно-методическим вопросам практики;
* вести дневник практики;
* соблюдать правила внутреннего трудового распорядка;
* выполнять распоряжения непосредственного руководителя практики;
* своевременно оформить и представить отчетную документацию по практике руководителю от кафедры;
* при возникновении обстоятельств, препятствующих выполнению программы практики или присутствию на дифференцированном зачете, не позднее чем на следующий день уведомить декана факультета о причине и предоставить соответствующие документы, подтверждающие уважительные обстоятельства, в первый день по завершению уважительных обстоятельств.

На период практики один из студентов, проходящих практику, назначается старостой подгруппы. В его обязанности входит учет посещаемости студентов, общая организация работы, оповещение студентов о коллективных консультациях и семинарах, выполнение поручений руководителей практики.

**4. ПЕРЕЧЕНЬ ДОКУМЕНТАЦИИ СТУДЕНТА-ПРАКТИКАНТА**

Во время прохождения ознакомительной расчетной практики по механике студент под контролем руководителя практики составляет в соответствии с программой практики индивидуальный план работы и отражает ход его выполнения в дневнике практики. Дневник проверяется руководителями практики от кафедры и используется практикантом при составлении отчета о работе. Отчет должен быть подписан студентом и непосредственным руководителем практики от кафедры.

По итогам ознакомительной расчетной практики по механике студент сдает руководителю практики от кафедры отчетную документацию, включающую:

* отчеты по результатам выполнения репродуктивных и проблемно-поисковых заданий;
* дневник практики.

*Требования к содержанию и оформлению заданий*

1. Название задания.
2. Исходные данные для выполнения задания.
3. Обработка результатов прямых, косвенных и совмещенных измерений.
4. Анализ полученных результатов.

**5. УЧЕТ И ОЦЕНКА ПРАКТИКИ СТУДЕНТА**

После окончания практики согласно графику проведения аттестации принимается дифференцированный зачет.

Дифференцированный зачет по практике принимается при наличии у студента обязательной отчетной документации, предусмотренной программой практики.

Отметка, выставляемая на дифференцированном зачете, складывается из следующих компонентов:

* результаты всех видов деятельности студента в период практики (планирование работы, качество подготовки к работе, самостоятельность работы);
* качество выполнения заданий;
* количество выполненных заданий.

Итоги практики подводятся на конференции, организованной после

**6. ЗАДАНИЯ НА ПЕРИОД ПРАКТИКИ**

***Репродуктивные задания***

***I цикл***

1. Вычислить абсолютную погрешность ускорения и мгновенной скорости прямолинейного равноускоренного движения (к работе №1).
2. Вычислить абсолютную погрешность момента инерции: маховика без грузов на стержнях, маховика с закрепленными на стержнях грузами, одного груза (к работе №4).
3. Вычислить абсолютную погрешность коэффициента упругости проволоки , модуля Юнга ; оценить относительную погрешность модуля Юнга (к работе №5).
4. Вычислить абсолютную погрешность коэффициента трения качения (к работе №10).

***II цикл***

1. Вычислить абсолютную погрешность ускорения свободного падения (к работам №6, №2).
2. Определить коэффициент жесткости пружины, используя формулу зависимости периода колебаний пружины от массы груза и жесткости пружины, и вычислить его абсолютную погрешность (к работе №7).
3. Вычислить абсолютную погрешность коэффициента внутреннего трения исследуемой жидкости (к работе №8).
4. Вычислить абсолютную погрешность скорости звука в воздухе (к работе №9).

***Проблемно-поисковые задания***

1. Определить зависимость силы упругости от удлинения проволоки с выводом уравнения прямой регрессии.
2. Определить зависимость периода колебаний математического маятника от его длины путем определения параметров степенной функции.

# Тема 1. ОЦЕНКА ИСТИННОГО ЗНАЧЕНИЯ ИЗМЕРЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ

# *Классификация и общая характеристика погрешностей*

Численное значение физической величины получается в результате ее измерения. *Измерить* физическую величину – значит сравнить ее с другой однородной величиной, принятой за единицу. Измерение осуществляется опытным путем с помощью специальных технических средств.

Различают прямые, косвенные и совместные измерения.

*Прямым* называется такое измерение, при котором значение искомой величины находят непосредственно из отсчета по прибору (измерение длины линейкой, времени секундомером).

*Косвенным* называется такое измерение, при котором значение определяемой величины находится по формуле как функция других величин (нахождение плотности вещества по массе и объему).

*Совместными* называются проводимые одновременно измерения двух или нескольких не одноименных величин для определения зависимости между ними (одновременное измерение электрического сопротивления проводника и его температуры для установления зависимости сопротивления от температуры).

При измерении находится не абсолютно точное, а приближенное значение искомой физической величины, т.е. в полученном результате измерения содержится *погрешность*.

*Абсолютная погрешность* характеризует отклонение полученного результата от истинного значения искомой величины и равна разности между приближенным значением и точным :

При этом абсолютная погрешность может быть как положительной, так и отрицательной.

В большинстве случаев точное значение неизвестно и, следовательно, не всегда можно определить знак погрешности, но практически это бывает несущественно: важна лишь величина отклонения. Поэтому погрешность измерения характеризуется модулем разности .

При повторных измерениях в одних и тех же условиях опыта результаты оказываются разными – наблюдается их разброс. Это указывает на неодинаковые значения абсолютных погрешностей в разных опытах. Максимальная абсолютная погрешность является верхней границей погрешности . Она определяется неравенством

и принимается за количественную оценку точности измерения.

С целью упрощения терминологии величину принято называть абсолютной погрешностью измерения, понимая под этим модуль границы абсолютной погрешности.

Из неравенства (1.1.2) следует, что

т.е. истинное значение лежит в интервале . Абсолютная погрешность определяет *полуширину этого интервала*.

Результат измерения записывают в следующей форме:

Например, диаметр поршня . Отсюда следует, что нижняя граница значения диаметра НГ , верхняя граница ВГ , а само значение диаметра поршня лежит в интервале от 104,3 до 104,7 мм. Приведенная форма записи приближенных чисел называется *интервальной.*

Абсолютная погрешность не всегда удобна для характеристики точности измерения. Например, абсолют ная погрешность длины при длине предмета в несколько метров несущественна, а при длине в несколько миллиметров она весьма значительна. И совершенно непригодно понятие абсолютной погрешности для сравнения точности величин с неодинаковыми размерностями. Например, бессмысленным будет вопрос о том, какое измерение точнее: измерение времени с точностью до или измерение длины с точностью до . Поэтому для определения и сравнения точности измерений используют *относительную погрешность* – отношение абсолютной погрешности к значению измеряемой величины:

Величина является верхней границей абсолютной погрешности, а величина – верхней границей относительной погрешности.

Из соотношения (1.1.5) следует, что относительная по­грешность показывает, какую часть (долю) абсолютная погрешность составляет от самой величины. Обычно относительную погрешность выражают в процентах:

Например, если период колебаний маятника измерен с точностью до трех сотых долей секунды (), то относительная погрешность

Это означает, что абсолютная погрешность составляет две сотые доли от значения измеряемой величины *.*

Погрешности делятся на случайные, систематические и промахи.

*Случайные погрешности* – это ошибки, появление которых не может быть предупреждено. Они возникают вследствие самых различных причин, результаты действий которых столь малы, что их нельзя выделить и учесть по отдельности (изменение температуры в процессе измерения, незначительное движение воздуха, несовершенство наших органов чувств и т.д.), поэтому случайную погрешность рассматривают как суммарный эффект действии многих факторов. Случайные погрешности могут оказать определенное влияние на отдельное измерение, но при многократных измерениях они подчиняются статистическим законам и их влияние на результаты измерения можно учесть или значительно уменьшить.

*Систематическими* называют такие погрешности, которые остаются постоянными или закономерно изменяются при повторных измерениях одной и той же величины. Такие погрешности возникают в результате конструктивных особенностей измерительных приборов, неточности метода исследования, каких-либо упущений экспериментатора, а также при применении для вычислений неточных формул, округленных констант. Систематические погрешности всегда односторонне влияют на результаты измерений (только увеличивая или уменьшая их).

*Промахи (грубые ошибки)* – это чрезмерно большие ошибки, явно искажающие результат измерения. Этот класс погрешностей вызван чаще всего неправильными действиями наблюдателя. Измерения, содержащие промахи и грубые погрешности, следует отбрасывать.

В дальнейшем мы будем предполагать, что систематические погрешности и грубые просчеты устранены, и рассмотрим только случайные погрешности.

* 1. ***Случайные величины. Характеристики распределения случайных величин***

Случайные погрешности результатов эксперимента можно рассматривать как разновидность случайных величин, т.е. переменных величин, значения которых зависят от случая. Для практических целей целесообразно знать количественные характеристики распределения случайных величин. Существуют две основные характеристики, по которым можно определить сходство или различие распределений случайных величин:

* расположение центра группирования, вокруг которого сосредоточено все распределение;
* степень рассеяния данных измерения от центра группирования.

На рисунке 1 графически представлены различные распределения случайных величин. По оси отложены значения случайных величин, по оси – частоты их появления. Для наглядности ломаные линии распределения заменены плавными кривыми.

*а*)

*б*)

*в*)

**Рисунок 1.1 – Распределения случайных величин**

Основной характеристикой положения центра группирования является среднеарифметическое :

Если среди результатов измерений встречаются равные (пусть результат встречается раз, результат – раз и т.д.), то среднее арифметическое

Для описания рассеяния существует несколько характеристик, но лучше всего рассеяние измеренной величины характеризуют *дисперсия* и *среднеквадратичное отклонение*.

*Дисперсия* определяется как среднее значение квадратов отклонений от среднеарифметического и при неограниченном числе измерений принимает вид:

*Среднеквадратичное отклонение* определяется как корень квадратный из дисперсии:

Дисперсия обладает следующими основными свойствами:

1. Дисперсия суммы или разности двух независимых величин равн сумме дисперсий слагаемых:
2. Дисперсия функции случайных независимых аргументов :

где – дисперсии случайных независимых величии .

1. Дисперсия постоянной величины .
2. ***Основные понятия выборочного метода***

Наиболее точное значение измеряемой величины () можно получить при неограниченно большом количестве испытаний. Однако такой опыт практически осуществить невозможно, так как для этого требуется слишком много времени и труда. Таким образом, вынуждены прибегать к ограниченному числу измерений, которое получило название *выборки*. Но замена большого числа измерений (*генеральной совокупности*) ограниченным количеством испытаний (*выборкой*) оправдано лишь тогда, когда числовые характеристики, полученные по выборке, будут достаточно близкими по своим значениям к характеристикам генеральной совокупности.

Для теоретического обоснования выборочного метода важное значение имеет теорема Ляпунова: при достаточно большом объеме выборки разность между генеральной средней и выборочной средней выражает ошибку выборки, абсолютное значение которой

где

есть среднеквадратичное отклонение выборки; – объем выборки (число измерений), – выборочная средняя, т.е. среднеарифметическое значение измеряемой величины; – коэффициент Стьюдента, зависящий от коэффициента надежности и числа измерений , значение которого находится по таблице.

Из формулы (1.3.1) следует, что с увеличением объема выборки уменьшается; это равносильно постепенному сближению выборочной средней с генеральной средней . Таким образом, выборочный метод имеет теоретическое обоснование, и, следовательно, оценку измеряемой величины можно производить по выборочным параметрам.

# *Оценка при прямых измерениях*

Оценить истинное значение измеряемой величины – это значит:

1) для результатов независимых измерений величины указать функцию , которая дает достаточно хорошее приближение к значению ; такая функция называется *точечной оценкой*. Точечная оценка определяется одним числом;

2) указать границы интервала , который с заданной вероятностью покрывает значение ; такая оценка называется *доверительной* или *интервальной*.

В качестве точечной оценки истинного значения измеряемой величины применяют *среднеарифметическое значение* результатов измерений.

Точечные оценки всегда приблизительны, поскольку их получают из отдельной выборки, поэтому необходимо установить надежность каждой оценки. Следовательно, для оценки каждого параметра следует определить интервал , который с определенной вероятностью охватывает оцениваемое значение .

Доверительные оценки определяются двумя числами – концами интервала. Если означает вероятность того, что результат измерений отличается от истинного значения на величину, не большую, чем , это записывают так:

или

где – доверительная вероятность, или коэффициент надежности; – доверительный интервал, величина – случайная ошибка измерения (ошибка выборки). Выражение (1.2.1) означает, что с вероятностью, равной , результат измерений не выходит за пределы доверительного интервала .

Таким образом, для получения доверительной оценки истинного значения измеряемой величины необходимо произвести измерений, рассчитать выборочное среднеквадратичное и для заданной надежности найти коэффициент . По этим данным определяется доверительный интервал . Окончательный результат запишется в виде .

*Алгоритм обработки результатов прямых измерений*

1. Провести измерений величины .
2. Определить среднеарифметическое значение этой величины:
3. Рассчитать среднеквадратичное отклонение результата измерения от среднего значения :
4. Оценить случайную ошибку измерения :

где – коэффициент Стьюдента, значение которого находят по таблице в зависимости от коэффициента надежности [в лабораторных работах выбирается из интервала (0,900; 0,999)] и количества измерений .

1. Определить систематическую (приборную) ошибку *.*
2. Определить полную погрешность путем сравнения и выбирая в качестве абсолютной погрешности наибольшую из них. Если величины случайной и систематической погрешностей близки друг к другу, то обе они влияют на точность результата примерно в одинаковой степени. В этом случае .
3. Записать значение искомой величины в виде .
4. Определить относительную погрешность: .

# Рассмотрим пример обработки опытных данных при измерении диаметра проволоки микрометром, допускаемая абсолютна погрешность которого . Полученные значения диаметра проволоки и необходимые вычисления представлены в таблице.

Таблица 1.1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № п/п |   |  |  |
| 1 | 1,12 | -0,01 | 0,0001 |
| 2 | 1,13 | - | - |
| 3 | 1,14 | 0,01 | 0,0001 |
| 4 | 1,13 | - | - |
| 5 | 1,12 | -0,01 | 0,0001 |
| 6 | 1,14 | 0,01 | 0,0001 |
| 7 | 1,14 | 0,01 | 0,0001 |
| 8 | 1,10 | -0,03 | 0,0009 |
| 9 | 1,11 | -0,02 | 0,0004 |
| 10 | 1,12 | -0,01 | 0,0001 |
| 11 | 1,13 | - | - |
| 12 | 1,14 | 0,01 | 0,0001 |
| 13 | 1,14 | 0,01 | 0,0001 |
|  |  |  |  |

Среднеквадратичное отклонение результата измерения

По таблице коэффициентов Стьюдента при находим . По этим данным получаем

Так как , то общая погрешность измерения диаметра проволоки определяется абсолютной погрешностью микрометра . Поэтому результат измерения может быть представлен в виде .

# *Оценка при косвенных измерениях*

В случае косвенных измерений при вычислении среднеарифметического значения можно применить два способа. Пусть имеется ряд значений , а величина задается уравнением .

**I.** Вычисляют и, подставив это значение в уравнение , получают .

**II.** Для каждого из значений вычисляют , а затем определяют .

Соответственно двумя способами вычисляют погрешность величины .

**I.** С учетом того, что – функция одной переменной, по формуле (1.2.3) находят сначала дисперсию

а затем среднеквадратичное отклонение величины , извлекая квадратный корень из обеих частей равенства (1.5.1). При этом получают

**II.** Вычисляют ряд значений и, воспользовавшись формулой (1.3.2), находят среднеквадратичное отклонение выборки

Если погрешности измерений малы по сравнению с измеряемой величиной (это положено в основу всех формул), то оба способа дают одинаковые результаты. Если физическая величина получается путем косвенных измерений и является функцией нескольких независимых непосредственно измеряемых величии , то вычисление среднеквадратичного отклонения, а также интервала существенно зависит от вида функции .

Величина представляет собой абсолютную погрешность измерений при малых выборках. Доверительный интервал при ограниченном числе измерений имеет тот же физический смысл, что и среднеквадратичное отклонение при большом числе измерений. Это означает, что для нахождения необходимо пользоваться формулой (1.2.3), учитывая, что . Значения в формуле (1.2.3) представляют собой дисперсии при измерении величин .

*Алгоритм обработки результатов косвенных измерений*

Пусть задана некоторая зависимость вида искомой величины от непосредственно измеряемой.

1. Найти среднее значение измеренной величины :
2. Подставить полученное значение в формулу и определить среднее значение искомой величины .
3. Рассчитать доверительные оценки при измерении параметров (как при прямых измерениях):

 – систематическая (приборная) ошибка.

1. Определить полную погрешность косвенного измерения искомой величины:
2. Записать значение искомой величины в виде .
3. Определить относительную погрешность: .

Рассмотрим пример вычисления погрешности при косвенных измерениях. Предположим, что в результате изучения движения некоторого тела получена следующая зависимость пути от времени :

Пусть . Среднее значение пути

Пусть доверительные оценки величин соответственно равны: .

Для оценки погрешности при определении пути воспользуемся формулой (1.2.3) с учетом приближения . Тогда

Подставив численные значении в формулу (1.5.3), найдем

Таким образом, получим окончательный результат:

1. ***Округление погрешностей и результатов измерений***
* При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом десятичных знаков.
* При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр.
* При возведении в степень в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближенное число.
* Во всех промежуточных результатах следует сохранять на одну цифру больше, чем рекомендуют предыдущие правила; в окончательном результате эта «запасная цифра» отбрасывается.
* Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков или значащих цифр, чем другие, их предварительно следует округлить, сохраняя только одну лишнюю цифру.
* Если некоторые данные (обычно табличные) можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с цифрами эти данные следует брать с цифрами.
* Если первая из отбрасываемых цифр меньше пяти, то остающиеся цифры не изменяются. Пример: значение округляется до .
* Если первая из отбрасываемых цифр больше или равна пяти и за ней следует значащая цифра, то последняя остающаяся цифра увеличивается на единицу. Пример: значение округляется до .
* Если первая из отбрасываемых цифр равна пяти и за ней не следует значащих цифр, то округление производится до ближайшего четного. Пример: значение округляется до ; значение округляется до ; значение округляется до .
* Величину погрешности следует рассчитывать не более чем до трех значащих цифр, округляя затем до одной-двух. Более высокая точность оценки погрешностей в учебной лаборатории является излишней. Иногда приходится пользоваться табличными или заранее измеренными значениями. Если при этом не указана погрешность, ее считают равной половине последней значащей цифры (например, или ).

При записи результатов измерений в интервальной форме необходимо придерживаться следующих правил.

1. Результат измерения записывается вместе с его погрешностью:

|  |  |
| --- | --- |
| *правильно:* | *неправильно:* |
|  |  |

1. Погрешность округляется с избытком до одной значащей цифры:

|  |  |
| --- | --- |
| *правильно:* | *неправильно:* |
|  |  |

1. Конечный результат округляется так, чтобы его последняя цифра и значащая цифра абсолютной погрешности принадлежали к одному и тому же разряду:

|  |  |
| --- | --- |
| *правильно:* | *неправильно:* |
|  |  |

1. Если в ответе содержится множитель вида , то показатель степени и в результате, и в его абсолютной погрешности должен быть одинаковым:

|  |  |
| --- | --- |
| *правильно:* | *неправильно:* |
|  |  |

1. Измеряемая величина и ее абсолютная погрешность выражаются в одних единицах:

|  |  |
| --- | --- |
| *правильно:* | *неправильно:* |
|  |  |

Коэффициенты Стьюдента

для доверительной вероятности при измерениях

|  |  |
| --- | --- |
| Число измерений | Доверительная вероятность |
| 0,9 | 0,95 | 0,990 | 0,999 |
| 2 | 6,314 | 12,706 | 63,657 | 636,622 |
| 3 | 2,920 | 4,303 | 9,925 | 31,598 |
| 4 | 2,353 | 3,182 | 5,841 | 12,941 |
| 5 | 2,132 | 2,776 | 4,604 | 8,610 |
| 6 | 2,015 | 2,571 | 4,032 | 6,849 |
| 7 | 1,943 | 2,447 | 3,707 | 5,959 |
| 8 | 1,895 | 2,365 | 3,449 | 5,405 |
| 9 | 1,860 | 2,306 | 3,355 | 5,041 |
| 10 | 1,833 | 2,262 | 3,250 | 4,781 |
| 11 | 1,812 | 2,228 | 3,169 | 4,587 |
| 12 | 1,796 | 2,201 | 3,106 | 4,437 |
| 13 | 1,782 | 2,179 | 3,055 | 4,318 |
| 14 | 1,771 | 2,160 | 3,012 | 4,221 |
| 15 | 1,761 | 2,145 | 2,977 | 4,140 |
| 16 | 1,753 | 2,131 | 2,947 | 4,073 |
| 17 | 1,746 | 2,120 | 2,921 | 4,015 |
| 18 | 1,740 | 2,110 | 2,878 | 3,965 |
| 19 | 1,734 | 2,101 | 2,878 | 3,922 |
| 20 | 1,729 | 2,093 | 2,861 | 3,883 |
| 21 | 1,725 | 2,086 | 2,845 | 3,850 |
| 22 | 1,721 | 2,080 | 2,831 | 3,819 |
| 23 | 1,717 | 2,074 | 2,819 | 3,792 |
| 24 | 1,714 | 2,069 | 2,807 | 3,767 |
| 25 | 1,711 | 2,064 | 2,797 | 3,745 |
|  | 1,6448 | 1,9600 | 2,5758 | 3,2905 |

# Тема 2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

1. ***Понятие о корреляционных связях. Коэффициент корреляции между двумя переменными***

Во многих задачах требуется установить и оценить зависимость изучаемой случайной величины от одной или нескольких других величин *.*

Случайные величины могут быть независимыми либо связанными статистической зависимостью.

*Статистической зависимостью* называют такую зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения другой. В частности, при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой. В этом случае статистическую зависимость называют *корреляционной.* Между двумя случайными величинами есть корреляционная зависимость, если каждому значению одной из них соответствует неопределенное количество значений другой, но средние из этих значений зависят от значений первой величины. Чередование числа этих разных значений таково, что говорить о многозначной функциональной связи не приходится.

Однозначную функциональную зависимость между величинами и можно считать частным случаем корреляционной зависимости. Если каждому значению соответствует только одно вполне определенное значение , и наоборот, то корреляционная связь переходит в функциональную. Примером корреляционной связи может служить связь роста и веса у людей.

Корреляционный анализ изучает усредненный закон поведения каждой случайной величины в зависимости от значения другой величины, а также меру зависимости (тесноту связи) между рассматриваемыми величинами, другими словами, степень близости корреляционной зависимости к функциональной.

Если изучается зависимость между двумя переменными, то корреляция называется *парной,* а при наличии связи между зависимой переменной и группой независимых переменных – *множественной.*

Рассмотрим зависимость от одной случайной величины при условии линейной связи между ними. Это означает, что мы можем выразить их в виде уравнения прямой или плоскости. Такое упрощение вызывается главным образом тем, что большинство нелинейных зависимостей можно путем замены переменных заменить линейными.

Нелинейную зависимость типа можно преобразовать так: *.* Если , то получим линейную зависимость вида *.* Аналогично нелинейную функцию можно выразить с помощью логарифмов: *.* Если то получим линейную зависимость .

Методы корреляционного анализа применяются к широкому кругу задач, где устанавливается зависимость между величинами, каждая из которых подвергается случайному рассеиванию (неконтролируемому разбросу).

Одним из основных применений теории корреляции является решение задач обоснованного прогноза, т.е. указание пределов, в которых с наперед заданной надежностью будет содержаться интересующая нас величина, если другие получают определенные значения.

Количественной мерой зависимости между изучаемыми величинами является *коэффициент корреляции*

где – сумма произведений отклонений, – количество наблюдений, – выборочные среднеквадратичные отклонения, определяемые по формуле (1.3.2). Коэффициент корреляции не зависит ни от характера изучаемых величин, ни от единиц, в которых они измерены. Коэффициент корреляции выражает степень взаимосвязи между двумя переменными лишь в случае линейной зависимости.

*Свойства коэффициента корреляции.*Для коэффициента корреляции выполняется неравенство . Если , то говорят о положительной (прямой) корреляции между и , так как большим значениям соответствуют преимущественно большие значения *.* Если , то говорят об отрицательной (обратной) корреляции. В этом случае большие значения обусловливают появление малых значений *.* Чем теснее связь между переменными, тем ближе величина к или .

При имеет место слабая степень тесноты связи, при – умеренная, при – заметная и при – высокая степень тесноты связи. Эти ограничения весьма условны. Равенство означает отсутствие линейной зависимости, но не исключает зависимости нелинейной (например, параболической), а равенство – наличие линейной функциональной зависимости между величинами и ,т.е. каждому значению одной величины соответствует точно одно значение другой.

Коэффициент корреляции не изменяется при изменении начала отсчета и масштаба измерения величин.

Расчет коэффициента корреляции покажем на примере исследования зависимости показаний рентгеновского датчика, выраженных в делениях шкалы, от количества содержащегося в аглошихте железа (по результатам химического анализа0, выраженного в процентах. Результаты замеров и необходимых величин приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 161,5 | 61,0 | 1,38 | 10,2 | 14,07 | 1,9044 | 104,04 |
| 2 | 161,8 | 55,8 | 1,68 | 5,0 | 8,40 | 2,8224 | 25,00 |
| 3 | 162,8 | 42,6 | 2,68 | -8,2 | -21,98 | 7,1824 | 67,24 |
| 4 | 157,5 | 36,4 | -2,62 | -14.4 | 37,73 | 6,8644 | 207,36 |
| 5 | 157,0 | 33,8 | -3,12 | -17,0 | 53,04 | 9,7344 | 289,00 |
| 6 | 159,0 | 51,0 | -1,12 | 0,2 | -0,22 | 1,2544 | 0,04 |
| 7 | 161,4 | 57,0 | 1,28 | 6,2 | 7,94 | 1,6384 | 38,44 |
| 8 | 161,4 | 64,2 | 1,28 | 13,4 | 17,15 | 1,6384 | 179,56 |
| 9 | 158,0 | 48,2 | -2,12 | -2,6 | 5,51 | 4,4944 | 6,76 |
| 10 | 160,8 | 58,0 | 0,68 | 7,2 | 4,90 | 0,4624 | 51,84 |
|  | 1601,2 | 508 | 0 | 0 | 126,54 | 37,996 | 969,28 |

Близкое к единице значение коэффициента корреляции свидетельствует о том, что в рассмотренном примере между величинами и существует удовлетворительная прямолинейная зависимость.

# *Прямая регрессия*

Основной задачей теории корреляции является установление формы корреляционной связи, т.е. в данном случае речь идет об аналитическом выражении зависимости между двумя или более переменными при помощи уравнения, называемого *уравнением регрессии.*

Ограничимся рассмотрением лишь линейной зависимости. Это значит, что зависимость между величинами можно выразить при помощи уравнения прямой

где .

Прямая регрессии, как и коэффициент корреляции, определяется на основании действительно зафиксированных величин. Найдем выборочное уравнение прямой линии регрессии на по данным 10 наблюдений (см. табл. 2.1):

Подставив численные значения в уравнение (2.2.1), получим искомое уравнение регрессии на *.*

Полученная таким способом эмпирическая формула в общем случае не является эмпирическим выражением какого-либо физического закона. Эмпирические формулы – это лишь формулы, которые более или менее хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Схематическое изображение прямой регрессии на поле корреляции зависимости представлено на рисунке 2.1.

**Рисунок 2.1**

Таким образом, определив на основании опытных данных значение параметра , получим уравнение прямой, которая наилучшим образом аппроксимирует данные экспериментальные точки. Практическое значение получаемых регрессионных уравнений состоит в том, что из двух величин можно измерить лишь одну, а вторую взять из таблицы корреляционной связи между ними.

Как видно из рисунка 2.1, имеет место рассеяние переменной около прямой регрессии. Величина рассеяния определяется среднеквадратичным отклонением от прямой регрессии. При помощи этой величины можно судить о точности определения переменной по известной переменной *.* Среднеквадратичное отклонение от прямой регрессии можно рассчитать при помощи соотношения:

Если распределение значений зависимой переменной вдоль прямой регрессии нормальное, что предполагается в большинстве случаев, то это значит, что около прямой регрессии находится зона , в которой лежит большинство (в соответствии с величиной ) значений измеряемой величины. Для расчета квадратичного отклонения от прямой регрессии используем пример из таблицы 2.1, где определяется коэффициент корреляции между показаниями рентгеновского датчика и результатами химического анализа железорудных смесей на содержание железа. Результаты химического анализа принимаются за независимую переменную , а показания рентгеновского датчика – за зависимую переменную . Среднеквадратичное отклонение

На рисунке 2.1 изображены на поле корреляции прямая регресс и доверительный интервал по данным зависимости между показаниями анализатора и количеством содержащегося в пробах железа. Полученное значение доверительного интервала к прямой регрессии означает, что с надежностью из каждых 100 измерений 95 результатов попадут в интервал вблизи прямой регрессии.

*Алгоритм обработки результатов измерений*

*для нахождения аналитических зависимостей между величинами*

*на основе корреляции между ними*

1. Задать вид аналитической функции типа .
2. По опытным данным найти среднеквадратичное отклонение переменных и и коэффициент корреляции:
3. Определить параметр уравнения регрессии:
4. Найти доверительные границы прямой регрессии:
5. Представить окончательный результат на поле корреляции линией регрессии и доверительными интервалами.

Для расчета прямой регрессии используем данные, показывающие соотношение глубины и диаметра лунки при квазистационарном лазерном разрушении материала. В таблице 2.2 приведены результаты измерения глубины и диаметра лунок, образующихся в алюминии под действием лазерного излучения. Глубину лунки примем за независимую переменную, а ее диаметр – за зависимую.

Таблица 2.2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0,42 | 0,13 | -1,09 | 1,1881 | -0,20 | 0,0400 | 0,2180 |
| 2 | 0,58 | 0,16 | -0,93 | 0,8649 | -0,17 | 0,0289 | 0,1581 |
| 3 | 0,74 | 0,18 | -0,77 | 0,5929 | -0,15 | 0,0225 | 0,1155 |
| 4 | 1,10 | 0,23 | -0,41 | 0,1681 | -0,10 | 0,0100 | 0,0410 |
| 5 | 1,23 | 0,27 | -0,28 | 0,0784 | -0,06 | 0,0036 | 0,0168 |
| 6 | 1,37 | 0,29 | -0,14 | 0,0196 | -0,04 | 0,0016 | 0,0056 |
| 7 | 1,44 | 0,32 | -0,07 | 0,0049 | -0,01 | 0,0001 | 0,0007 |
| 8 | 1,75 | 0,34 | 0,24 | 0,0576 | 0,01 | 0,0001 | 0,0024 |
| 9 | 1,83 | 0,41 | 0,32 | 0,1024 | 0,08 | 0,0064 | 0,0256 |
| 10 | 2,40 | 0,50 | 0,89 | 0,7921 | 0,17 | 0,0289 | 0,1513 |
| 11 | 2,53 | 0,52 | 1,02 | 1,0404 | 0,19 | 0,0361 | 0,1938 |
| 12 | 2,72 | 0,56 | 1,21 | 1,4641 | 0,23 | 0,0529 | 0,2783 |
|  | 18,11 | 3,91 |  | 5,3735 |  | 1,8110 | 1,2071 |

Уравнение прямой регрессии .

Среднеквадратичное отклонение переменных и и коэффициент корреляции:

Параметр уравнения регрессии

Уравнение прямой регрессии примет вид:

Среднеквадратичное отклонение от прямой регрессии

Доверительные границы прямой регрессии при надежности

Прямая регрессии и доверительные границы представлены на поле корреляции на рисунке 2.2.

**Рисунок 2.2**

**Тема 3. НАХОЖДЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ**

1. ***Постановка задачи***

Кроме метода нахождения аналитических зависимостей между измеряемыми величинами на основе корреляции между ними, часто используют метод наименьших квадратов. Сущность его заключается в нахождении параметров эмпирических формул, если известен ряд измерений величины (функция), соответствующих различным значениям величины (аргумент).

Данные эксперимента целесообразно представить графически, особенно в тех случаях, когда вид функциональной зависимости заранее неизвестен. По виду графика или каким-либо теоретическим соображениям, выбирают эмпирическую зависимость (вид функции), например и т.д. Тогда задача сводится к определению параметров выбранной формулы так, чтобы они наилучшим образом описывали имеющиеся экспериментальные данные.

1. ***Отыскание параметров эмпирических формул***

Пусть выбрана функциональная зависимость . Если все измерения произведены с одинаковой точностью, то параметры определяются из условия, что сумма квадратов отклонений измеренных значений от вычисленных принимает наименьшее значение, т. е.

В основе принципа наименьших квадратов лежит утверждение, согласно которому наивероятнейшим значением, полученным из ряда измерений одинаковой точности, является такое, для которого сумма квадратов разностей этого значения и результатов измерений является наименьшей. Следовательно, отыскание параметров на основе метода наименьших квадратов сводится к решению системы уравнений, полученной из выражения (3.2.1) при исследовании величины на экстремум:

1. ***Отыскание параметров многочлена***

Пусть искомая формула имеет вид многочлена

Подставив формулу (3.3.1) в (3.2.1), получим:

Тогда в соответствии с принципом наименьших квадратов система уравнений (3.2.2) будет иметь вид:

Из полученной системы уравнений однозначно находятся параметры .

Рассмотрим пример. В результате измерения зависимости величины от для определения значений получен ряд значений :

Таблица 3.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 |
|  | 2,57 | 4,65 | 7,58 | 11,15 | 15,58 | 20,75 | 26,57 |

Построив график, видим, что искомая зависимость близка к квадратичной: .



**Рисунок 3.1**

Для определения по методу наименьших квадратов нужно записать суммы, найти производные и приравнять их к нулю, в результате чего получим следующую систему уравнений:

Используя данные таблицы, находим:

Тогда система (3.3.2) примет вид:

Решив систему (3.3.3) для параметров , получим . Следовательно, эмпирическая формула, наилучшим образом описывающая функциональную зависимость между и , имеет вид

Система уравнений (3.2.2) решается проще, если она будет линейной. А она линейна в том случае, когда параметры входят в эмпирическую формулу тоже линейно. Поэтому эмпирическую формулу желательно выбирать в виде многочлена.

Если зависимость выбрана так, что искомые параметры входят в формулу нелинейно, то ее преобразуют к линейному виду. Так, показательная функция логарифмированием сводится к линейной зависимости:

 или ,

где.

Степенная функция логарифмированием также сводится к линейной зависимости:

 или ,

где.

Чтобы убедиться в правильности выбора показательной или степенной зависимости, для описания экспериментальных данных строят графики, используя соответственно полулогарифмическую или логарифмическую шкалы. Точки на графике должны лежать вблизи прямой линии.

Если выбрана функция нескольких переменных, то определение параметров осуществляется описанным выше способом.

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ**

***Репродуктивные задания***

***I цикл***

***Задание 1.* Вычислить абсолютную погрешность ускорения и мгновенной скорости прямолинейного равноускоренного движения (к работе №1).**

Ускорение грузов и мгновенную скорость в конечный момент времени определяют из уравнений кинематики равноускоренного движения:

Неточность в определение значений этих величин вносят измерения пути и времени. Полная погрешность ускорения:

Полная погрешность мгновенной скорости:

Погрешность измерения расстояния  *–* половина цены деления линейки.

Погрешность измерения времени

где – коэффициент Стьюдента; – среднеквадратичное отклонение результата измерения

 – цена деления секундомера.

***Задание 2.* Вычислить абсолютную погрешность момента инерции: маховика без грузов на стержнях, маховика с закрепленными на стержнях грузами, одного груза (к работе №4).**

Момент инерции маховика определяется по формуле

Неточность в определение значения момента инерции вносят измерения массы груза, радиуса шкива маховика, времени падения груза и высоты, с которой падает груз. Полная погрешность момента инерции:

где *–* половина цены деления штангенциркуля; *–* половина цены деления линейки. Погрешность измерения времени

где – коэффициент Стьюдента; – среднеквадратичное отклонение результата измерения – цена деления секундомера.

Момент инерции одного груза массой , принятого за точечную массу, определяется по формуле Неточность в определение значения момента инерции вносят измерения массы груза и расстояния от оси вращения до закрепленного на стержне груза.

Полная погрешность момента инерции груза:

где (половина цены наименьшего разряда). Погрешность измерения расстояния от оси вращения до закрепленного на стержне груза имеет методический характер вследствие замены материальной точки реальным грузом. Поэтому за следует принять половину линейного размера груза на стержне.

***Задание 3.* Вычислить абсолютную погрешность коэффициента упругости проволоки , модуля Юнга ; оценить относительную погрешность модуля Юнга (к работе №5).**

Абсолютная погрешность коэффициента упругости проволоки определяется как при прямых измерениях:

где – коэффициент Стьюдента , – среднеквадратичное отклонение результата измерения .

Значение модуля Юнга определяется по формуле

Неточность в определение значения момента модуля Юнга вносят измерения коэффициента упругости проволоки, ее длины, диаметра и приближенное значение постоянной . Полная погрешность модуля Юнга:

где (половина цены наименьшего разряда), – половина цены деления линейки,  *–* половина цены деления микрометра.

Относительная погрешность модуля Юнга

***Задание 4.* Вычислить абсолютную погрешность коэффициента трения качения (к работе №10).**

Значение коэффициента трения качения определяется по формуле

Неточность в определение коэффициента трения качения вносят измерения диаметра шара, угла наклона плоскости и угла отклонения шарика .

Полная погрешность коэффициента трения качения:

где , – половина цены деления штангенциркуля.

***II цикл***

***Задание 5.* Вычислить абсолютную погрешность ускорения свободного падения (к работам №2, №6).**

Период гармонических колебаний математического маятника

Неточность в определение значения ускорения свободного падения вносят измерения длины маятника*,* периода колебаний и приближенное значение постоянной . Полная погрешность ускорения свободного падения:

где (половина цены наименьшего разряда), *–* половина цены деления линейки. Погрешность измерения периода

где – коэффициент Стьюдента; – среднеквадратичное отклонение результата измерения . *–* цена деления секундомера.

***Задание 6.* Определить коэффициент жесткости пружины, используя формулу зависимости периода колебаний пружинного маятника от массы груза и жесткости пружины, и вычислить его абсолютную погрешность (к работе №7).**

Период свободных гармонических колебаний пружинного маятника

Неточность в определение значения коэффициента жесткости пружины вносят измерения массы груза, периода колебаний и приближенное значение постоянной . Полная погрешность коэффициента жесткости пружины:

где (половина цены наименьшего разряда), Погрешность измерения периода

где – коэффициент Стьюдента , – среднеквадратичное отклонение результата измерения . *–* цена деления секундомера.

***Задание 7.* Вычислить абсолютную погрешность коэффициента внутреннего трения исследуемой жидкости (к работе №8).**

Значение коэффициента внутреннего трения исследуемой жидкости определяется по формуле

где *–* цена деления микроскопа, *–* число малых делений, между которыми умещается шарик.

Неточность в определение значения коэффициента внутреннего трения жидкости вносят измерения расстояние между верхней и нижней метками на цилиндре, диаметра шарика и времени его движения.

Полная погрешность коэффициента внутреннего трения жидкости будет равна:

где  *–* половина цены деления линейки, – половина цены деления микроскопа, *–* цена деления секундомера.

***Задание 8.* Вычислить абсолютную погрешность** **скорости звука в воздухе (к работе №9).**

Скорость распространения волны определяется по формуле

Неточность в определение скорости звука вносят измерения длины волны и частоты. Полная погрешность скорости звука будет равна:

Погрешность длины волны

где – коэффициент Стьюдента , – среднеквадратичное отклонение результата измерения .

Погрешность задаваемой генератором частоты определяется из паспорта прибора:

***Проблемно-поисковые задания***

***Задание 9.* Определить зависимость удлинения проволоки от внешней силы с выводом уравнения прямой регрессии.**

Внутренняя сила упругости, возникающая при деформации однородного изотропного тела, численно равна внешней силе, но направлена противоположно:

Сила, действующая на проволоку при подвешивании груза,

.

Рассмотрим линейную зависимость между и :.

Эту зависимость можно выразить при помощи уравнения прямой:

Параметр уравнения регрессии

Среднеквадратичные отклонения переменных и и коэффициент корреляции определяются по опытным данным:

Подставив численные значения в уравнение (1), получим искомое уравнение регрессии, выражающее зависимость :

Доверительный интервал рассчитывается при помощи соотношения

где – коэффициент Стьюдента , – среднеквадратичное отклонение от прямой регрессии.

После построения графика зависимости на нем указываются границы доверительного интервала.

*Порядок выполнения задания*

1. Установите индикатор часового типа на нулевую отметку путем поворота шкалы.
2. Последовательно нагружая проволоку грузами массой , снимите по индикатору показания абсолютного удлинения . Сила, действующая на струну при подвешивании груза, .
3. Повторяйте данную операцию, пока суммарный вес грузов не станет равен .
4. Данные измерений занесите в таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

1. Постройте график зависимости .
2. По формуле (2) определите коэффициент корреляции .
3. Выведите уравнение регрессии в соответствии с (1) и приведите его к виду (3).
4. Постройте график уравнения регрессии.
5. Определите величину доверительного интервала и обозначьте ее на графике.

***Задание 10.* Определить зависимость периода колебаний математического маятника от его длины путем определения параметров степенной функции (используя метод наименьших квадратов).**

Зависимость периода математического маятника от его длины имеет вид:

Данную формулу можно представить в нелинейном виде:

Для нахождения параметров, входящих в формулу нелинейно, необходимо преобразовать ее к линейному виду с помощью логарифмирования:

Вводится замена:

Тогда степенная функция сводится к линейной

Для определения параметров составляется выражение для суммы квадратов отклонений экспериментально полученных значений от вычисленных:

При значениях и , для которых сумма (2) имеет минимум, функция (1) будет наилучшим образом описывать полученные экспериментальные значения. Условием минимума является

Решая полученную систему уравнений, найдем и , после чего можно найти .

*Порядок выполнения задания*

1. Установите какую-либо длину математического маятника (достаточно большую) .
2. Приведите маятник в колебательное движение (с малой амплитудой) и измерьте время 20 полных колебаний.
3. Определите период .
4. Повторите опыт 7 раз для различных длин маятника.
5. Данные измерений и вычислений занести в таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

1. Решите систему уравнений (4).
2. Запишите окончательный результат в виде .